35. 有理型函數ノ除外値ニ就テ

（阪大） 遠木 幸成

$w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理型函數トシ ソノ逆函數ヲ $z=\varphi(w)$

トスルトキ $\zeta=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガ如何ナル構造ヲモテハ $w=a$ ガ Nevanlinna ノ意味デ除外値（$\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a)}{T(r)}>0$）デアルカ否カトイフ問題ニ就テハ多クノ人々ニヨリ研究サレテヰルガ私ハ数学爾ノ数物年会デ発表ニ昨年ノ秋ノ数学会ノ例会デオ話シシタコトヲ述ベマス。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $z=\varphi(w)$ ガ領域 Δ デ p 價單葉ナ代数型函数トスレバ分岐点ノ数ハ高々 $2(p-1)$ 個デアル。

〔証明〕 Δ ノ Euler 指標ヲ ρ_0 トシ Δ 上ノ $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ノ Euler 指標ヲ ρ トスレバ Hurwitz ノ関係式ニヨリ．

$$\rho=p\rho_0+\nu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シ ν ハ分岐次数ノ總和トスル。

然ルニ $z=\varphi(w)$ ハ單葉函数ナル故ニ z 平面上ノ一枚ノ領域ニ寫像サレテヰルカラ ρ ハ寫像領域ノ境界数ヨリ２ダケ小サイ値デアル．

他方 $z=\varphi(w)$ ガ p 價ナルコトヨリ $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ノ境界数ハ Δ ノ境界数（ρ_0+2）ノ高々 p 倍デアル。

故ニ $p(\rho_0+2)-2\geqq\rho$

(1) ニ代入シテ $p(\rho_0+2)-2\geqq p\rho_0+\nu$ $\quad\therefore 2(p-1)\geqq\nu$ (証明)

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ Modul M ナル円環領域デ q 價單葉ナ正則函数 $z=\varphi(w)$ ノ像領域 D ハ二重連結デソノ直径ヲ d トシニツノ境界ノ距離ヲ δ トスレバ．M ト q ダケニヨッテ定マル常数 k ガ存在シテ $d<k\delta$ トナル。

〔証明〕 $\zeta=w^{\frac{1}{q}}$ ナル函数デ w 平面上ノ Modul M ノ円環領域ヲ ζ 平面上ノ Modul $\frac{1}{q}M$ ナル円環領域 Δ ニ寫像スレバ Δ ハ $z=\varphi(\zeta^q)$ ニヨリ D ニ一対一ニ等角寫像サレル。故ニ Teichmüller ノ円環領域ニ関スル曲歪定理 [1] ニヨリ $d<k\delta$ ナルコトガ直チニワカル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理型ナ函数トシ．ソノ逆函数ヲ

附注 1) Teichmüller; Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung Deutsch Math., 3 (1938) pp. 621-678.

$z=\varphi(w)$ トスルトキ次ノ條件 i) ii) ヲ満足スルナラバ $m(r,a)$ ハ有界デアル。

i) アル正数 p ガアッテ $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガスベテ高々 p 葉ノ Insel バカリカラナッテ井ル

ii) 円 $|w-a|=\rho$ ノ z 平面上ニ於ケル原像ガ原点ト無限遠点トヲ分ツモノハ有限個シカナイ。2)（但シ $f(0)\neq a$ トス）

［証明］吾々ハ $\rho=2$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ故ニ $\rho=2$ トシテ証明シヨウ。

$|w|<2$ ノ原像 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ガ $|z|=r$ ナル円ヲ切リ取ッタトキノ弧ノハル中心角ヲ夫々 $\Theta_1(r), \Theta_2(r), \ldots, \Theta_n(r)$ トシ十分 r ヲ大キクトッテアルトスレバ條件 ii) ニヨリ $\sum_{i=1}^{n}\Theta_i(r)<2\pi$ デアル。C_i ニ含マレル $|w-a|<1$ ノ原像ヲ C_i' トシ $z=0$ ヨリ C_i' マデノ距離ヲ r_i トシ C_i' ニヨリ切リ取ラレタ $|z|=r$ ノ弧ヲ β_i トスル。

今円環領域 $1<|w|<2$ ヲ Modul $\frac{1}{2p-1}$ ナル $(2p-1)$ 個ノ円環領域ニ分ケレバ $1<|w|<2$ 上ノ各 Insel ハ Lemma 1 ニヨリ少クトモ一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ。故ニ $\zeta=\log z$ ニテ C_i ヲ ζ 平面ニ写像シテ考ヘレバ Lemma 2 ニヨリ p ニヨッテ定マル常数 k ガ存在シテ

$$\log\frac{r}{r_i}<k\,\Theta_i(r) \qquad \cdots\cdots (2)$$

又 $|w-a|<2$ 上ノ Insel ハ高々 p 葉ナル故ニ

$$\int_{\beta_i(r)}\frac{\partial \arg\frac{1}{f(z)-a}}{\partial\theta}\,d\theta \leqq 2p\pi \qquad \cdots\cdots (3)$$

(2) 及ビ (3) ニヨリ

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\log\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\theta$$

脚注 2) 私ハコノ定理ヲ 1947 年ノ数物年会デ証明シソノ後津村氏ヨリ学士院紀事 19 デ別証明ヲ与ヘラレタガ共ニ條件 ii) ヲ忘レテ井タ。コノ條件 ii) ガ必要ナルコトハ ii) ヲ除ケバ定理ガ成立シナイ例ヲ本論文ノ終リデ与ヘルカラソレヲ参照セレタイ。

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\int_{r_i}^{r}\frac{\partial \log\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|}{\partial \log t}\, d\log t\, d\theta = \frac{i}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\int\frac{\partial \arg\frac{1}{f(z)-a}}{\partial\theta}\, d\log t\, d\theta$$

$$< \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{r_i}^{r}2\pi p\, d\log t < p\sum_{i=1}^{n}k\,\Theta_i(r) < 2\pi k p \qquad \text{(証了)}$$

系 (Teichmüller) $w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理型ナ函数トシソノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トスルトキ. アル正数 ρ ガアツテ, $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガスベテ単葉ナ Insel バカリカラナツテヰルナラバ $m(r,a)$ ハ有界デアル. (但シ $f(0)\neq a$ トス)

〔証明〕 $|w-a|<\rho$ 上ノ Insel ガ單葉ナルコトヨリ條件 ii) ハ明ラカニ満足サレテヰル故ニ定理1ヨリ直チニ成立スル.

$\boxed{\text{定理 2}}$ $w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理ナ函数トシソノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トスルトキアル正数 ρ ガアツテ $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガスベテ高々 p 葉ノ Insel バカリカラナツテヰルナラバ $\varliminf_{r\to\infty} m(r,a) < K$ トナル. 但シ K ハ p 及ビ ρ ニヨツテ定マル常数デアル.

〔証明〕 若シ十分小サナ ρ' ヲトツタトキ $|w-a|<\rho'$ ノ原像ガ定理1ノ條件 ii) ヲ満足スルナラバ定理1ニヨリ直チニ成立スル。故ニ如何程 ρ' ヲ小サクトツテモ ii) ヲ満足シナイトスル. 本一般性ヲ失フコトナク $\rho=1$ トオクコトが出来ル. 然ルトキハ円環領域 $e^{-(2p-1)\pi} < |w-a| < 1$ ヲ Modul π ナル $(2p-1)$ 個ノ円環領域ニ分ケレバ, 各 Insel ハ少クトモ一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ。從ツテソノ Z 平面上ノ原像ハ Modul π ノ二重連結領域トナル. (Hurwitz ノ關係式ヨリ明ラカ) シカモ零点ト集限集点トヲ分ツトスレバ Teichmüller ノ曲歪定理ニヨリ適当ニ r_i ヲ選ベバ $|z|=r_i$ ハ全ク Modul π ノ二重連結領域ニ含マレル。

故ニ $\quad m(r_i,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a}\right| d\theta \leqq e^{(2p-1)\pi}$

故 $\quad \varliminf_{r\to\infty} m(r,a) < e^{(2p-1)\pi}$ (証了)

問 $W=f(Z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一価超越有理型ナ函数トシ、ソノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トスルト若シアル正数 ρ ガアツテ $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガスベテ高々 p 葉ナ Insel バカリカラナツテヰルナラバ $w=a$ ハ除外値デハアリ得ナイ。

次ニ吾々ハ定理1ニ於テ條件ii)ヲ除ケバ定理1ガ成立シナイ例ヲ挙ゲヨウ。

$$f(Z)=Z\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{3^{(2n)!}}\right)^2\right]}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{3^{(2n-1)!}}\right)^2\right]}$$

コノ函数ハ $z=\pm3^{(2n)!}$ $(n=0,1,2\cdots\cdots)$ デ零点ヲ $z=\pm3^{(2n-1)!}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デ極ヲモツ函数デ円周 $|z|=3^{(2n)!}$ 上デハ $|f(z)|$ ハ n ガ十分大ナラバ非常ニ小サク $|z|=3^{(2n-1)!}$ 上デハ $|f(z)|$ ハ非常ニ大キクナル故ニ ρ ヲ十分小サク選ベバ $|w|<\rho$ 上ノ $f(z)$ ノ逆函数 $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ハ高々二葉ノ Insel バカリカラナツテヰルガ條件ii)ヲ満足シナイ然カモ $n(r,0)$ ハ有界デハアリ得ナイ。

1947. 3. 10